Corrigé du Concours Blanc
Epreuve A

On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N. On pioche de façon équiprobable, successivement et avec remise un jeton. On suppose les tirages indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n le numéro du jeton obtenu au tirage n et l'on pose

$$M_n = \max(U_1, \ldots, U_n).$$

Partie 1 : Questions de cours (ou presque)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Chaque jeton ayant la même probabilité d'être obtenu à l'étape n puisque le tirage est avec remise. Ainsi,
$$\boxed{U_n \sim \mathscr{U}(\llbracket 1; N \rrbracket).}$$

2. Par définition, on a
$$\mathbb{E}(U_n) = \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(U_n = k).$$
Or pour tout $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, $\mathbb{P}(U_n = k) = \frac{1}{N}$ et donc
$$\mathbb{E}(U_n) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{N}\frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}.$$
De même, par le théorème de transfert,
$$\mathbb{E}\left(U_n^2\right) = \sum_{k=1}^{N} k^2\mathbb{P}(U_n = k) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{1}{N}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}.$$
D'où, par la formule de Koenig-Huygens,
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(U_n) &= \mathbb{E}\left(U_n^2\right) - \mathbb{E}(U_n)^2\\ &= \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2\\ &= (N+1)\,\frac{4N+2-3N-3}{12}\\ &= \frac{(N+1)(N-1)}{12}.\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{E}(U_n) = \frac{N+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(U_n) = \frac{(N-1)(N+1)}{12}.}$$

On pose $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.

3. Par linéarité de l'espérance,
$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} U_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(U_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{N+1}{2} = \frac{n(N+1)}{2}.$$

D'autre puisque les $(U_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ sont indépendants, par propriété de la variance (et non sa linéarité !!), on a

$$\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} U_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(U_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(N-1)(N+1)}{12} = \frac{n(N-1)(N+1)}{12}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \frac{n(N+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(S_n) = \frac{n(N-1)(N+1)}{12}.}$$

4. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{N+1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{n(N+1)}{2}\right| \geqslant n\,\varepsilon\right).$$

Or d'après la question précédente, $\frac{n(N+1)}{2} = \mathbb{E}(S_n)$. Donc, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{N+1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant n\,\varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{(n\,\varepsilon)^2} = \frac{n(N-1)(N+1)}{12n^2\,\varepsilon^2}.$$

Donc

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{N+1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{(N-1)(N+1)}{12n\,\varepsilon^2}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{(N-1)(N+1)}{12n\,\varepsilon^2} = 0$. Conclusion, par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{N+1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.}$$

Cela signifie qu'asymptotiquement, la probabilité que $\frac{S_n}{n}$ s'éloigne de $\frac{N+1}{2}$ ne serait-ce de $\varepsilon > 0$ tend vers 0. On dit que $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\frac{N+1}{2}$. Autrement dit le numéro moyen obtenu empiriquement lors des n premiers tirages converge vers la moyenne théorique $\frac{N+1}{2}$.

Partie 2 : Probabilités conditionnelles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

5. On observe que

$$M_{n+1} = \max(U_1, \ldots, U_n, U_{n+1}) = \max(\max(U_1, \ldots, U_n), U_{n+1}) = \max(M_n, U_{n+1}).$$

Conclusion,

$$\boxed{M_{n+1} = \max(M_n, U_{n+1}).}$$

6. Soit $(i,j) \in [\![1;N]\!]^2$. On admet que $\mathbb{P}(M_n = i) \neq 0$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_{n+1} = j \mid M_n = i) &= \mathbb{P}(\max(M_n, U_{n+1}) = j \mid M_n = i)\\ &= \mathbb{P}(\max(i, U_{n+1}) = j \mid M_n = i).\end{aligned}$$

On sait que $M_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$ et que U_{n+1} est indépendante de $(U_1, \ldots, U_n)$. Donc U_{n+1} est indépendante de M_n. Conclusion,

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1;N]\!]^2, \qquad \mathbb{P}(M_{n+1} = j \mid M_n = i) = \mathbb{P}(\max(i, U_{n+1}) = j).}$$

7. Soit $(i,j) \in [\![1;N]\!]^2$. Premier cas, si $j < i$, alors $\max(i, U_{n+1}) = j$ est impossible et donc dans ce cas, par la question précédente,
$$\mathbb{P}(M_{n+1} = j \mid M_n = i) = 0.$$
Deuxième cas, si $j = i$, alors,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_{n+1} = j \mid M_n = i) &= \mathbb{P}(\max(i, U_{n+1}) = i) \\
&= \mathbb{P}(U_{n+1} \leqslant i) \\
&= \sum_{k=1}^{i} \mathbb{P}(U_{n+1} = k) \\
&= \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{N} \qquad\qquad \text{car } U_{n+1} \sim \mathscr{U}([\![1;N]\!]) \\
&= \frac{i}{N}.
\end{aligned}$$
Troisième cas, si $j > i$, alors
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_{n+1} = j \mid M_n = i) &= \mathbb{P}(\max(i, U_{n+1}) = j) \\
&= \mathbb{P}(U_{n+1} = j) \\
&= \frac{1}{N} \qquad\qquad \text{car } U_{n+1} \sim \mathscr{U}([\![1;N]\!]).
\end{aligned}$$
Conclusion, pour tout $(i,j) \in [\![1;N]\!]^2$,
$$\boxed{\mathbb{P}(M_{n+1} = j \mid M_n = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \\ \frac{i}{N} & \text{si } i = j \\ \frac{1}{N} & \text{si } j > i. \end{cases}}$$

8. On note que $(M_n = 1)$ est l'évènement « le maximum des n premiers tirages est de 1 » cela n'est possible que si tous les tirages ont retourné le jeton 1 : $((U_1 = 1) \cap (U_2 = 1) \cap \cdots \cap (U_n = 1))$. Ainsi,
$$\boxed{(M_n = 1) = ((U_1 = 1) \cap (U_2 = 1) \cap \cdots \cap (U_n = 1)).}$$
Donc par indépendance des U_k, on obtient,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n = 1) &= \mathbb{P}((U_1 = 1) \cap (U_2 = 1) \cap \cdots \cap (U_n = 1)) \\
&= \mathbb{P}(U_1 = 1)\,\mathbb{P}(U_2 = 1) \times \cdots \times \mathbb{P}(U_n = 1) \\
&= \frac{1}{N} \times \frac{1}{N} \times \cdots \times \frac{1}{N} \qquad\qquad \text{car } \forall i \in [\![1;N]\!],\ \mathbb{P}(U_i = 1) = \frac{1}{N} \\
&= \frac{1}{N^n}.
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}(M_n = 1) = \frac{1}{N^n}.}$$

Partie 3 : Lois des premiers maximums

On suppose dans cette partie que $N = 4$. On pose pour toute la suite du problème
$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(M_n = 1) \\ \mathbb{P}(M_n = 2) \\ \mathbb{P}(M_n = 3) \\ \mathbb{P}(M_n = 4) \end{bmatrix}.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $(M_n = i)_{i \in [\![1;4]\!]}$ forme un système complet d'évènements, donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(M_{n+1} = 1) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(M_{n+1} = 1 \mid M_n = i)\, \mathbb{P}(M_n = i).$$

Or par la question 7. on a pour tout $i \in [\![2;4]\!]$, on a $j = 1 < i$ et donc $\mathbb{P}(M_{n+1} = 1 \mid M_n = i) = 0$ et pour $i = 1 = j$, $\mathbb{P}(M_{n+1} = 1 \mid M_n = 1) = \frac{1}{N} = \frac{1}{4}$. Donc

$$\mathbb{P}(M_{n+1} = 1) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(M_n = 1).$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_{n+1} = 2) &= \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(M_{n+1} = 2 \mid M_n = i)\, \mathbb{P}(M_n = i) \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{P}(M_n = 1) + \frac{2}{4}\mathbb{P}(M_n = 2) + 0 \qquad \text{d'après la question 7.} \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{P}(M_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(M_n = 2).
\end{aligned}$$

Pour $j = 3$,

$$\mathbb{P}(M_{n+1} = 3) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(M_n = 1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(M_n = 2) + \frac{3}{4}\mathbb{P}(M_n = 3).$$

Enfin, pour $j = 4$,

$$\mathbb{P}(M_{n+1} = 4) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(M_n = 1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(M_n = 2) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(M_n = 3) + \mathbb{P}(M_n = 4).$$

Matriciellement, on obtient donc que

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(M_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(M_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(M_{n+1} = 3) \\ \mathbb{P}(M_{n+1} = 4) \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{P}(M_n = 1) \\ \mathbb{P}(M_n = 2) \\ \mathbb{P}(M_n = 3) \\ \mathbb{P}(M_n = 4) \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad X_{n+1} = AX_n.}$$

10. On commence par observer que $M_1 = U_1 \sim \mathscr{U}([\![1;4]\!])$. Donc

$$X_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

D'après la question précédente, on trouve donc

$$X_2 = AX_1 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Dès lors, on en déduit les probabilités de M_2 :

i	1	2	3	4
$\mathbb{P}(M_2 = i)$	1/16	3/16	5/16	7/16

On vérifie bien que la probabilité totale vaut 1.

11. Soit $M_2' = M_2 - 2$. Par la question précédente, on a

i	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(M_2' = i)$	1/16	3/16	5/16	7/16

Donc par définition de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}\left(M_2'\right) = \sum_{k=-1}^{2} k\mathbb{P}\left(M_2' = k\right) = -1 \times \frac{1}{16} + 0 + 1 \times \frac{5}{16} + 2 \times \frac{7}{16} = \frac{-1+5+14}{16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}.$$

De plus, par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left(\left(M_2'\right)^2\right) = \sum_{k=-1}^{2} k^2\mathbb{P}\left(M_2' = k\right) = (-1)^2 \times \frac{1}{16} + 0 + 1^2 \times \frac{5}{16} + 2^2 \times \frac{7}{16} = \frac{1+5+28}{16} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}.$$

Donc par la formule de König-Huygens,

$$\mathbb{V}\left(M_2'\right) = \mathbb{E}\left(\left(M_2'\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(M_2'\right)^2 = \frac{17}{8} - \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{136-81}{64} = \frac{55}{64}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{V}\left(M_2'\right) = \frac{55}{64}.}$$

12. On a

$$\mathbb{P}\left((M_3 = 3) \cap (M_2 = 3)\right) = \mathbb{P}\left(M_3 = 3 \mid M_2 = 3\right)\mathbb{P}\left(M_2 = 3\right).$$

Or par la question 7. pour $i = 3 = j$, $\mathbb{P}\left(M_3 = 3 \mid M_2 = 3\right) = \frac{3}{N} = \frac{3}{4}$ et par la question précédente $\mathbb{P}(M_2 = 3) = \frac{5}{16}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left((M_3 = 3) \cap (M_2 = 3)\right) = \frac{3}{4} \times \frac{5}{16} = \frac{15}{64}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left((M_3 = 3) \cap (M_2 = 3)\right) = \frac{15}{64}.}$$

13. En procédant de la même façon pour les autres probabilités, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((M_3=1)\cap(M_2=1)) &= \mathbb{P}(M_3=1 \mid M_2=1)\,\mathbb{P}(M_2=1) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{64}\\
\mathbb{P}((M_3=2)\cap(M_2=1)) &= \mathbb{P}(M_3=2 \mid M_2=1)\,\mathbb{P}(M_2=1) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{64}\\
\mathbb{P}((M_3=3)\cap(M_2=1)) &= \mathbb{P}(M_3=3 \mid M_2=1)\,\mathbb{P}(M_2=1) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{64}\\
\mathbb{P}((M_3=4)\cap(M_2=1)) &= \mathbb{P}(M_3=4 \mid M_2=1)\,\mathbb{P}(M_2=1) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{64}\\
\mathbb{P}((M_3=2)\cap(M_2=2)) &= \mathbb{P}(M_3=2 \mid M_2=2)\,\mathbb{P}(M_2=2) = \frac{2}{4}\times\frac{3}{16}=\frac{6}{64}\\
\mathbb{P}((M_3=3)\cap(M_2=2)) &= \mathbb{P}(M_3=3 \mid M_2=2)\,\mathbb{P}(M_2=2) = \frac{1}{4}\times\frac{3}{16}=\frac{3}{64}\\
\mathbb{P}((M_3=4)\cap(M_2=2)) &= \mathbb{P}(M_3=4 \mid M_2=2)\,\mathbb{P}(M_2=2) = \frac{1}{4}\times\frac{3}{16}=\frac{3}{64}\\
\mathbb{P}((M_3=3)\cap(M_2=3)) &= \mathbb{P}(M_3=3 \mid M_2=3)\,\mathbb{P}(M_2=3) = \frac{3}{4}\times\frac{5}{16}=\frac{15}{64}\\
\mathbb{P}((M_3=4)\cap(M_2=3)) &= \mathbb{P}(M_3=4 \mid M_2=3)\,\mathbb{P}(M_2=3) = \frac{1}{4}\times\frac{5}{16}=\frac{5}{64}\\
\mathbb{P}((M_3=4)\cap(M_2=4)) &= \mathbb{P}(M_3=4 \mid M_2=4)\,\mathbb{P}(M_2=4) = \frac{4}{4}\times\frac{7}{16}=\frac{28}{64}.
\end{aligned}$$

Et enfin, pour tout $i<j$,

$$\mathbb{P}((M_3=i)\cap(M_2=j)) = \mathbb{P}(M_3=i \mid M_2=j)\,\mathbb{P}(M_2=j)=0.$$

Conclusion,

$M_2=i/M_3=j$	1	2	3	4
1	$1/64$	$1/64$	$1/64$	$1/64$
2	0	$6/64$	$3/64$	$3/64$
3	0	0	$15/64$	$5/64$
4	0	0	0	$28/64$

14. Puisque $((M_2=i))_{i\in[\![1;4]\!]}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(M_3=2)=\sum_{i=1}^{4}\mathbb{P}((M_3=2)\cap(M_2=i)).$$

Donc par la question précédente,

$$\mathbb{P}(M_3=2)=\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+0+0=\frac{7}{64}.$$

De même pour les autres probabilités, on obtient alors la loi marginale de M_3 :

j	1	2	3	4
$\mathbb{P}(M_3=j)$	$1/64$	$7/64$	$19/64$	$37/64$

De même, en sommant chaque ligne,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_2=1) &= \frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}=\frac{1}{16}\\
\mathbb{P}(M_2=2) &= 0+\frac{6}{64}+\frac{3}{64}+\frac{3}{64}=\frac{3}{16}\\
\mathbb{P}(M_2=3) &= 0+0+\frac{15}{64}+\frac{5}{64}=\frac{5}{16}\\
\mathbb{P}(M_2=4) &= 0+0+0+\frac{28}{64}=\frac{7}{16}
\end{aligned}$$

On retrouve bien la loi de M_2 :

i	1	2	3	4
$\mathbb{P}(M_2=i)$	$1/16$	$3/16$	$5/16$	$7/16$

15. Par la question 13. on observe que $\mathbb{P}((M_2=1)\cap(M_3=2))=0$. De plus, par la question précédente, $\mathbb{P}(M_2=1)=\frac{1}{16}$ et par la question 8. on a $\mathbb{P}(M_3=1)=\frac{1}{4^3}$. Donc

$$\mathbb{P}(M_2=1)\times\mathbb{P}(M_3=1)=\frac{1}{16}\frac{1}{4^3}\neq 0=\mathbb{P}((M_2=1)\cap(M_3=2)).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Les variables } M_2 \text{ et } M_3 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

16. On pose $M_3'=M_3-2$.Par la question 13. on a

$M_2'=i/M_3'=j$	-1	0	1	2
-1	$1/64$	$1/64$	$1/64$	$1/64$
0	0	$6/64$	$3/64$	$3/64$
1	0	0	$15/64$	$5/64$
2	0	0	0	$28/64$

Donc par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(M_2'M_3'\right) &= \sum_{-1\leqslant i,j\leqslant 2} ij\mathbb{P}\left(M_2'=i,M_3'=j\right)\\
&= (-1)^2\times\frac{1}{64}+0+(-1)\times 1\times\frac{1}{64}+(-1)\times 2\times\frac{1}{64}\\
&\quad +0\\
&\quad +0+0+1^2\times\frac{15}{64}+1\times 2\times\frac{5}{64}\\
&\quad +2\times 2\times\frac{28}{64}\\
&= \frac{1-1-2+15+10+112}{64}=\frac{135}{64}.
\end{aligned}$$

De plus, on a déjà vu que $\mathbb{E}(M_2')=\frac{9}{8}$ et enfin, par la question 14. on a

j	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(M_3=j)$	$1/64$	$7/64$	$19/64$	$37/64$

D'où,
$$\mathbb{E}\left(M_3'\right) = -\frac{1}{64} + 0 + \frac{19}{64} + 2 \times \frac{37}{64} = \frac{-1+19+74}{64} = \frac{92}{64} = \frac{13}{16}.$$
Finalement,
$$\operatorname{Cov}\left(M_2', M_3'\right) = \mathbb{E}\left(M_2'M_3'\right) - \mathbb{E}\left(M_2'\right)\mathbb{E}\left(M_3'\right) = \frac{135}{64} - \frac{9}{8}\frac{13}{16} = \frac{270-117}{128} = \frac{153}{128}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\operatorname{Cov}\left(M_2', M_3'\right) = \frac{153}{128}.}$$
En particulier M_2' et M_3' ne sont pas indépendantes. Supposons M_2 et M_3 indépendantes, alors nécessairement $M_2' = M_2 - 2$ et $M_3' = M_3 - 2$ le serait aussi. Donc par contraposée, on retrouve le résultat de la question précédente : $\boxed{M_2 \text{ et } M_3 \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

Partie 4 : Loi du n-ième maximum

On reprend $N \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Soit $k \in [\![1; N]\!]$. On observe que l'évènement $(M_n \leqslant k)$ correspond à l'évènement « le maximum lors des n-premiers tirages est inférieur ou égal à k » cela correspond donc à l'évènement « tous les n premiers tirages ont été inférieurs ou égaux à k ». Autrement dit,
$$\boxed{(M_n \leqslant k) = \bigcap_{i \in [\![1;n]\!]} (U_i \leqslant k)\,.}$$
Dès lors,
$$\mathbb{P}(M_n \leqslant k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in [\![1;n]\!]} (U_i \leqslant k)\right).$$
Or les variables aléatoires U_i sont indépendantes donc les évènements $(U_i \leqslant k)$ le sont également. Ainsi,
$$\mathbb{P}(M_n \leqslant k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_i \leqslant k)\,.$$
Puisque $U_i \sim \mathscr{U}([\![1; N]\!])$, on a
$$\mathbb{P}(U_i \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(U_i = j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{N} = \frac{k}{N}.$$
Finalement, on obtient que
$$\mathbb{P}(M_n \leqslant k) = \prod_{i=1}^{n} \frac{k}{N} = \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall k \in [\![1; N]\!], \qquad \mathbb{P}(M_n \leqslant k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n.}$$

18. Soit $k \in [\![2; N]\!]$. On observe que
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n \leqslant k) &= \mathbb{P}\left((M_n = k) \sqcup (M_n \leqslant k-1)\right) && \text{car } k \geqslant 2 \\
&= \mathbb{P}(M_n = k) + \mathbb{P}(M_n \leqslant k-1) && \text{car les évènements sont disjoints.}
\end{aligned}$$

Donc, par la question précédente,

$$\mathbb{P}(M_n = k) = \mathbb{P}(M_n \leqslant k) - \mathbb{P}(M_n \leqslant k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

De plus, par la question 8. $\mathbb{P}(M_n = 1) = \frac{1}{N^n} = \frac{1^n - 0^n}{N^n}$ donc la formule reste vraie pour $k = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![1; N]\!], \qquad \mathbb{P}(M_n = k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.}$$

19. Par la question précédente, on a

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(M_n = k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

On reconnaît alors une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(M_n = k) = \frac{N^n - 0^n}{N^n} = 1.$$

Le résultat est bien cohérent puisque $((M_n = k))_{k \in [\![1;N]\!]}$ forme un système complet. Conclusion, on a bien

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(M_n = k) = 1.}$$

20. Par définition, on a

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(M_n = k).$$

Donc par la question 18.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n) &= \sum_{k=1}^{N} k \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left[k\left(\frac{k}{N}\right)^n - k\left(\frac{k-1}{N}\right)^n \right] \\
&= N - N\left(\frac{N-1}{N}\right)^n + \sum_{k=1}^{N-1} \left[k\left(\frac{k}{N}\right)^n - k\left(\frac{k-1}{N}\right)^n \right]
\end{aligned}$$

Or pour tout $k \in [\![1; N-1]\!]$, $0 < \frac{k}{N} < 1$ et $0 < \frac{k-1}{N} < 1$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{k-1}{N}\right)^n = 0.$$

Puisque ni k ni N ne dépendent de n et que la somme est finie, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{N-1} \left[k\left(\frac{k}{N}\right)^n - k\left(\frac{k-1}{N}\right)^n \right] = \sum_{k=1}^{N-1} \lim_{n \to +\infty} \left[k\left(\frac{k}{N}\right)^n - k\left(\frac{k-1}{N}\right)^n \right] = \sum_{k=1}^{N-1} 0 = 0.$$

De même $\left(\frac{N-1}{N}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(M_n) = N.}$$

On rappelle que M_n est le maximum des numéros des jetons obtenus lors des n premiers tirages. Puisque le jeton N a une probabilité non nulle d'être tiré à chaque tirage, on finira au bout d'un certain temps par obtenir ce jeton N. Dans ce cas et pour tous les tirages suivants on aura $M_n = N$. La variable M_n converge alors vers le nombre (ou la variable aléatoire déterministe/constante) N, son espérance converge également N.

Partie 5 : Diagonalisation

On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, définie pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ par

$$f(P) = a_0 + (a_0 + 2a_1) X + (a_0 + a_1 + 3a_2) X^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + 4a_3) X^3.$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. On note $\mathscr{C} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

21. Calculons l'image de $\mathscr{C}$ par f. On a

$$f(1) = 1 + X + X^2 + X^3.$$

Donc $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f(1)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. De même,

$$\begin{aligned} f(X) &= 2X + X^2 + X^3 \\ f\left(X^2\right) &= 3X^2 + X^3 \\ f\left(X^3\right) &= 4X^3. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{B = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 4A.}$$

22. On observe que

$$\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \boxed{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{4} \end{pmatrix}\right).$$

La matrice est échelonnée en colonne et possède 4 pivots. Donc

$$\mathrm{rg}(B) = 4 = \dim\left(\mathbb{R}^4\right).$$

Donc B est inversible. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est bijective.}}$$

23. On a

$$\mathrm{rg}(B - 4I_4) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} \boxed{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{-2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \boxed{-1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

La matrice obtenue est échelonnée en colonne et possède 3 pivots. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{rg}(B - 4I_4) = 3.}$$

24. Par la question précédente et le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(B - 4I_4)) = \dim\left(\mathbb{R}^4\right) - \mathrm{rg}(B - 4I_4) = 4 - 3 = 1.$$

Donc $\mathrm{Ker}\,(B-4I_4)$ est engendré par un vecteur non nul. Or on note que $(0,0,0,1)\neq 0$ et $(0,0,0,1)\in \mathrm{Ker}\,(B-4I_4)$. Conclusion, $\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(B-4I_4)$:

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(B-4I_4)=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right).}$$

L'application $f-4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$ étant canoniquement associée à $B-4I_4$, on en déduit directement

$$\boxed{\mathrm{Ker}\left(f-4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)=\mathrm{Vect}\left(X^3\right).}$$

On pose $P_1=1-X$, $P_2=X-X^2$ et $P_3=X^2-X^3$.

25. On a $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(P_1)=(1,-1,0,0)$. Donc

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(f\,(P_1))=B\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&1&3&0\\1&1&1&4\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}=\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(P_1)\,.$$

D'où, $f\,(P_1)=P_1$. De même,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(f\,(P_2))=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&1&3&0\\1&1&1&4\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\-2\\0\end{bmatrix}=2\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(P_2)\,.$$

Donc $f\,(P_2)=2P_2$. Enfin,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(f\,(P_3))=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&1&3&0\\1&1&1&4\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\3\\-3\end{bmatrix}=3\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(P_3)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{f\,(P_1)=P_1,\qquad f\,(P_2)=2P_2,\qquad f\,(P_3)=3P_3.}$$

26. D'après la matrice D, on cherche (u_1,u_2,u_3,u_4) une famille de $\mathbb{R}_3[X]$ telle que

$$f\,(u_1)=u_1,\ f\,(u_2)=2u_2,\ f\,(u_3)=3u_3,\ f\,(u_4)=4u_4.$$

On observe que l'on peut prendre $u_1=P_1$, $u_2=P_2$, $u_3=P_3$. Pour u_4, on a

$$\begin{aligned}f\,(u_4)=4u_4 \quad&\Leftrightarrow\quad f\,(u_4)-u_4=0\\&\Leftrightarrow\quad \left(f-4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)(u_4)=0_{\mathbb{R}_3[X]}\\&\Leftrightarrow\quad u_4\in\mathrm{Ker}\left(f-4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right).\end{aligned}$$

Posons $P_4=X^3$ et $\mathscr{B}=(P_1,P_2,P_3,P_4)$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Puisque $\mathscr{B}$ est échelonnée en ses degrés, on en déduit que $\mathscr{B}$ est libre. De plus $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B})=4=\dim\,(\mathbb{R}_3[X])$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. De plus, par les deux questions précédentes,

$$f\,(P_1)=P_1,\qquad f\,(P_2)=2P_2,\qquad f\,(P_3)=3P_3$$

et

$$\left(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)(P_4) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(P_4) = 4P_4.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D.}$$

27. Posons $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Par la formule de changement de base, on a

$$B = PDP^{-1}.$$

Donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$B^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Or D est diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$. Calculons P^{-1}.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_4$, on retrouve bien que P est inversible de plus, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bien sûr, on a vérifié que $P^{-1}P = I_4$.

Dès lors, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
B^n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2^n & 2^n & 0 & 0 \\ 3^n & 3^n & 3^n & 0 \\ 4^n & 4^n & 4^n & 4^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2^n-1 & 2^n & 0 & 0 \\ 3^n-2^n & 3^n-2^n & 3^n & 0 \\ 4^n-3^n & 4^n-3^n & 4^n-3^n & 4^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2^n-1 & 2^n & 0 & 0 \\ 3^n-2^n & 3^n-2^n & 3^n & 0 \\ 4^n-3^n & 4^n-3^n & 4^n-3^n & 4^n \end{pmatrix}.}$$

28. On sait que $A = \frac{1}{4}B$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \frac{1}{4^n}B^n$. D'après la question 9. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = AX_n$ donc par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad X_n = A^{n-1}X_1.$$

Or $X_1 = U_1 \sim \mathscr{U}(\llbracket 1; 4 \rrbracket)$. Donc $X_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
X_n &= \frac{1}{4^{n-1}}B^{n-1}X_1 \\
&= \frac{1}{4^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1}-1 & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 3^{n-1}-2^{n-1} & 3^{n-1}-2^{n-1} & 3^{n-1} & 0 \\ 4^{n-1}-3^{n-1} & 4^{n-1}-3^{n-1} & 4^{n-1}-3^{n-1} & 4^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4^n}\begin{bmatrix} 1 \\ 2^n-1 \\ 3^n-2^n \\ 4^n-3^n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien avec $N = 4$ que pour tout $k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$,

$$\boxed{\mathbb{P}(M_n = k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.}$$

Stupéfiant. Admirable. Décoiffant !